Известия Института математики и информатики УдГУ. 2012. Вып. 1 (39)

УДК 517.954

© *Е. А. Логинова*

ЗАДАЧА О НЕСТАЦИОНАРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ТЕПЛА В НЕОДНОРОДНОМ МАТЕРИАЛЕ С ТРЕЩИНОЙ

Построено решение задачи о нестационарном распределении тепла в плоском неоднородном материале с трещиной–разрезом по отрезку.

Ключевые слова: нестационарное распределение тепла, неоднородная плоскость, трещина–разрез.

В работе рассматривается задача, описывающая распределение температуры в неоднородном материале с трещиной с учётом влияния времени. Задача имеет вид

$$\frac{\partial u(x_1,x_2,t)}{\partial t}-a^2\left(\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,t)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u(x_1,x_2,t)}{\partial x_2^2}+k\frac{\partial u(x_1,x_2,t)}{\partial x_2}\right)=0.$$

$$u(x_1,+0,t)-u(x_1,-0,t)=q_0(x_1,t);$$

$$\frac{\partial u(x_1,+0,t)}{\partial x_2}+ku(x_1,+0,t)-\frac{\partial u(x_1,-0,t)}{\partial x_2}-ku(x_1,-0,t)=q_1(x_1,t);$$

$$x_1\in[-1;1],\quad t\geqslant 0.$$

$$u(x_1,x_2,0)=0.$$

Областью, в которой рассматривается уравнение, будем считать плоскость Ox_1x_2 с разрезом $l=\{x|\,x_2=\pm 0;\ x_1\in[-1;1]\}$, что моделирует наличие трещины, проходящей по отрезку $[-1;1]$ оси абсцисс, параметр $t\in[0,+\infty)$ представляет собой время. Искомая функция $u(x_1,x_2,t)$ — температура в точке материала с координатами (x_1,x_2) в момент времени t.

Определение 1. *Решением* исходной задачи назовём функцию $u(x_1,x_2,t)$, принадлежащую пространству $C^{2,1}_{x,t}((-1;1)\times(0;\infty))$ и $C^{2,0}_{x,t}((-1;1)\times[0;\infty))$ и удовлетворяющую исходному уравнению в области $\mathbb{R}^2\backslash l$, $t\in(0;\infty)$, для которой в смысле главного значения при x_1, принадлежащем $(-1;1)$, выполнены граничные условия и по непрерывности выполнено однородное начальное условие, такую, что функции $u(x_1,x_2,t)$, $x_2\dfrac{\partial u(x_1,x_2,t)}{\partial x_2}$, $\dfrac{\partial u(x_1,x_2,t)}{\partial x_2}-\dfrac{\partial u(x_1,-x_2,t)}{\partial x_2}$ ограничены в окрестностях трещины при любом t, принадлежащем отрезку $[0;T]$, где $T>0$.

Определение решения принадлежит А. С. Рябенко.

Теорема 1. *Пусть функции* $q_1(x_1,t)\in C^{2,0}_{x,t}([-1;1]\times[0;\infty))$, $q_0(x_1,t)\in C^{2,0}_{x,t}([-1,1]\times[0,\infty))$ *и ограничены вместе со своими производными.*

Тогда решение исходной задачи единственно в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2\times(0;\infty))$ *и при* $t>0$ *имеет вид*

$$u=\frac{1}{8\pi}\int\limits_0^t\frac{a^2\tau k+x_2}{a^2\tau^2}\int\limits_{-1}^1\exp\left[\frac{-(x_1-\sigma)^2-(a^2\tau k+x_2)^2}{4a^2\tau}\right]\cdot q_0(\sigma,t-\tau)\,d\sigma\,d\tau-$$
$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_0^t\frac{1}{\tau}\int\limits_{-1}^1\exp\left[\frac{-(x_1-\sigma)^2-(a^2\tau k+x_2)^2}{4a^2\tau}\right]\cdot q_1(\sigma,t-\tau)\,d\sigma\,d\tau.$$

Также при $x_1\in(-1;1)$ *выполнены краевые и начальное условия.*

Т е о р е м а 2. *Пусть $t > 0$. Тогда решение исходной задачи является непрерывной ограниченной функцией аргументов x_1, $x_2 \in \mathbb{R}^2 \backslash l$. При $x_2 \to +0$, $x_1 \in [-1;1]$, $t \in [0;T]$, где $T > 0$, нормальный тепловой поток $\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ имеет асимптотическое представление вида*

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{e^{-\frac{k}{2}x_2}}{2\pi}\left[-\frac{(1-x_1)}{(1-x_1)^2+x_2^2}q_0(1,t) - \frac{(1+x_1)}{(1+x_1)^2+x_2^2}q_0(-1,t)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\ln((1-x_1)^2+x_2^2)q_0'(1,t) - \frac{1}{2}\ln((-1-x_1)^2+x_2^2)q_0'(-1,t)\right] + R_1(x_1,x_2,t),$$

а тепловой поток $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$ имеет асимптотическое представление вида

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{e^{-\frac{k}{2}x_2}}{4\pi}\left[-\frac{2x_2}{(1-x_1)^2+x_2^2}q_0(1,t) + \frac{2x_2}{(1+x_1)^2+x_2^2}q_0(-1,t)-\right.$$
$$-\ln((1-x_1)^2+x_2^2)q_1(1,t) + \ln((1+x_1)^2+x_2^2)q_1(-1,t)+$$
$$\left.+\frac{k}{2}\ln((1-x_1)^2+x_2^2)q_0(1,t) - \frac{k}{2}\ln((1+x_1)^2+x_2^2)q_0(-1,t)\right] + R_2(x_1,x_2,t).$$

Здесь функции $R_2(x_1,x_2,t)$, $R_2(x_1,x_2,t)$ ограничены.

Список литературы

1. Логинова Е.А. Решение задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной в случае конечного времени: тез. докл. четвертой междунар. науч. конф. «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования». ВГУ. Воронеж, 2011. С. 179–181.
2. Логинова Е.А. Решение задачи о распределении тепла в неоднородном материале с трещиной при неограниченно большом времени: тез. докл. четвертой междунар. науч. конф. «Современные проблемы прикладной математики, теории управления и математического моделирования». ВГУ. Воронеж, 2011. С. 181–182.

Поступила в редакцию 09.02.2012

E. A. Loginova

The problem of nonstationary heat propagation in an inhomogeneous material with a crack

The solution of the problem of nonstationary heat distribution in a planar inhomogeneous material with a crack along the segment is constructed.

Keywords: nonstationary heat distribution, inhomogeneous plane, crack–cut.

Mathematical Subject Classifications: 35Q74

Логинова Екатерина Александровна, аспирант, кафедра уравнений в частных производных и теории вероятностей, Воронежский государственный университет, 394006, Россия, г. Воронеж, Университетская площадь, 1. E-mail: vangog2007ekaterina@yandex.ru

Loginova Ekaterina Aleksandrovna, post-graduate student, Department of Partial Differential Equations and Theory of Probabilities, Voronezh State University, Universitetskaya pl., 1, Voronezh, 394006, Russia